

## Тренувальні вправи з геометрії для учнів, які закінчили 7 клас.

До всіх задач має бути коротка умова (що дано, що знайти), рисунок, розв'язання з повним обґрунтуванням і відповідь.

### Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

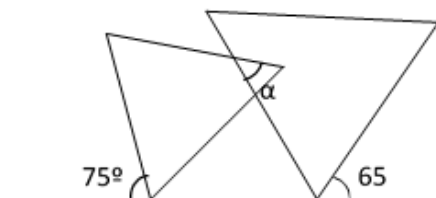
1. Точка  $D$  — середина відрізка  $MK$ ,  $MK = 16$  см. На прямій  $MK$  знайдіть усі точки  $Y$  такі, що  $MY + KY + DY = 30$  см.
2. Градусні міри суміжних кутів  $ABC$  і  $CBD$  відносяться як  $5 : 4$ . Знайдіть кут між бісектрисами кутів  $ABC$  і  $ABD$ . Скільки розв'язків має задача?

### Трикутники. Сума кутів трикутника.

1. Накресліть трикутник:
  - 1) гострокутний;
  - 2) прямокутний;
  - 3) тупокутний.

Проведіть із кожної вершини трикутника висоту.

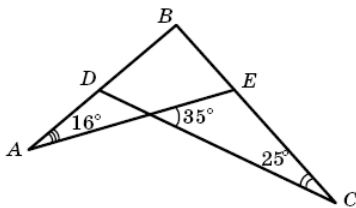
2. На продовженні основи  $BC$  рівнобедреного трикутника  $ABC$  за точку  $B$  позначено точку  $M$  таку, що  $\angle MBA = 128^\circ$ . Знайдіть кут між бічною стороною  $AC$  та бісектрисою кута  $ACB$ .
3. На медіані  $BM$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $O$  так, що  $\angle OAC = \angle OCA$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  — рівнобедрений.
4. Серединний перпендикуляр сторони  $BC$  трикутника  $ABC$  перетинає його сторону  $AB$  у точці  $D$ . Знайдіть довжину відрізка  $AD$ , якщо  $CD = 4$  см,  $AB = 7$  см.
5. Точка  $O$  — точка перетину серединних перпендикулярів сторін  $AC$  і  $BC$  трикутника  $ABC$  — належить його стороні  $AB$ . Доведіть, що:
  - 1) точка  $O$  — середина відрізка  $AB$ ;
  - 2)  $\angle ACB = \angle A + \angle B$ .
6. У трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC$ ,  $BD$  — медіана. Периметр трикутника  $ABC$  дорівнює  $50$  см, а трикутника  $ABD$  —  $40$  см. Знайдіть довжину медіани  $BD$ .
7. Доведіть, якщо в трикутнику  $ABC$  сторона  $AB$  вдвічі більша за сторону  $AC$ , то медіана, яка виходить з вершини  $C$ , перпендикулярна до бісектриси кута  $A$ .
8. У трикутнику  $ABC$   $AB = BC$ ,  $AC = 8$  см, точка  $E$  лежить на стороні  $BC$ , причому  $BE = EC$ . Відрізок  $AE$  ділить трикутник на дві частини, різниця периметрів яких дорівнює  $2$  см. Знайдіть  $AB$ .
9. У трикутнику  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ . Серединний перпендикуляр відрізка  $AB$  перетинає його в точці  $M$ , а відрізок  $BC$  — у точці  $K$ . Доведіть, що  $MK = \frac{1}{3} BC$ .
10. На малюнку зображено два рівносторонні трикутники. Знайдіть величину кута  $\alpha$ .



11. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом і радіусом вписаного кола.

### Паралельні прями. Сума кутів трикутника.

1. Медіана  $CM$  трикутника  $ABC$  дорівнює половині сторони  $AB$ . Доведіть, що трикутник  $ABC$  прямокутний.
2. У трикутнику  $ABC$  бісектриси кутів  $A$  і  $C$  перетинаються в точці  $O$ . Доведіть, що  $\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC$ .
3. Пряма, яка проходить через вершину  $A$  трикутника  $ABC$ , перетинає сторону  $BC$  в точці  $M$ . При цьому  $BM = AB$ ,  $\angle BAM = 35^\circ$ ,  $\angle CAM = 15^\circ$ . Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .
4. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.
5. Висоти  $AM$  і  $CK$  трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $H$ . Доведіть, що  $\angle AHC = 180^\circ - \angle ABC$ .
6. Бісектриси двох внутрішніх кутів гострокутного трикутника перетинають протилежні сторони під кутами  $63^\circ$  і  $81^\circ$ . Знайти кути трикутника.
7. Бісектриси трикутника  $ABC$  перетинаються в точці  $O$ . Відомо, що  $\angle AOB = 100^\circ$ ,  $\angle BAC = 30^\circ$ . Знайдіть  $\angle BOC$ .
8. Кут між висотою та бісектрисою прямокутного трикутника, проведеними з вершини його прямого кута, дорівнює  $12^\circ$ . Знайдіть гострі кути даного трикутника.
9. В рівнобедреному трикутнику кут при основі дорівнює  $15^\circ$ , а висота, що проведена до бічної сторони, дорівнює  $145$  см. Знайдіть бічну сторону трикутника.
10. Через точку перетину бісектрис трикутника  $ABC$  провели пряму, яка паралельна  $AB$  та перетинає сторони  $AC$  та  $BC$  у точках  $K$  та  $P$  відповідно.  $BP = 5$  см,  $AK = 7$  см. Знайти  $PK$ .
11. Пряма, паралельна стороні  $AC$  трикутника  $ABC$ , перетинає його сторони  $AB$  і  $BC$  у точках  $M$  і  $K$  відповідно так, що  $AM = MK$ . Відомо, що  $\angle B = 65^\circ$ ,  $\angle C = 45^\circ$ . Знайдіть кут  $KAC$ .
12. Яка градусна міра кута  $B$ , зображеного на малюнку?

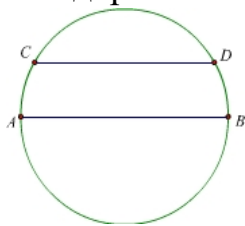


13. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює  $60^\circ$ , а сума гіпотенузи та меншого катета –  $27$  см. Знайти гіпотенузу трикутника.
14. Периметр рівнобедреного трикутника –  $36$  см, а сума довжин основи та бічної сторони –  $24$  см. Знайти бічну сторону.
15. Через вершину  $B$  трикутника  $ABC$  провели пряму, паралельну його бісектрисі  $AM$ . Ця пряма перетинає пряму  $AC$  у точці  $K$ . Доведіть, що трикутник  $BAK$  рівнобедрений.
16. У трикутнику  $ABC$   $AB = BC$ , кут при вершині на  $30^\circ$  менший за кут при основі,  $AP$  – бісектриса,  $PK \parallel AB$ ,  $PK$  перетинає сторону  $AC$  в точці  $K$ . Знайдіть  $\angle KPA$ .

17. Кут між бісектрисами рівнобедреного трикутника дорівнює  $130^\circ$ . Якими можуть бути кути цього трикутника?
18. Внутрішню точку  $O$  трикутника  $ABC$  з'єднали з вершинами трикутника. Виявилось, що  $\angle AOB = 90^\circ$ ,  $OB = OC$ ,  $\angle ACB = 45^\circ$ . Знайти величину кута  $OAB$ .
19. На стороні  $BC$  трикутника  $ABC$  позначили точку  $K$  так, що  $\angle BAK = 20^\circ$ . На відрізку  $AK$  позначили точку  $T$  так, що  $\angle ABT = 90^\circ$ . Виявилось, що  $AT = 2BK$ . Знайдіть  $\angle ABC$ .
20. У трикутнику  $ABC$  проведено бісектрису  $AK$ . Центр кола, вписаного в трикутник  $AKB$ , збігається із центром кола, описаного навколо трикутника  $ABC$ . Знайдіть кути трикутника  $ABC$ .
21. Відрізки  $AM$  і  $BK$  — бісектриси гострих кутів прямокутного трикутника  $ABC$ . Із точок  $M$  і  $K$  на гіпотенузу  $AB$  опустили перпендикуляри  $MP$  і  $KT$ . Знайдіть кут  $TPC$ .
22. У трикутнику  $ABC$   $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ , відрізок  $AD$  — бісектриса трикутника,  $CD = 7$  см. Знайдіть довжину катета  $BC$  і бісектрису  $AD$ .
23. Доведіть (двома способами!), що катет, який лежить проти кута, величина якого дорівнює  $30^\circ$ , дорівнює половині гіпотенузи. (Вказівка. 1 спосіб. Подвоїти катет і одержати рівносторонній трикутник. 2 спосіб. Провести медіану з вершини прямого кута.)
24. Кут між висотою і медіаною, проведеними з вершини прямого кута прямокутного трикутника, в 4 рази менший від одного з гострих кутів. Знайти кути трикутника.
25. Кут між двома висотами гострокутного трикутника  $ABC$  дорівнює  $60^\circ$ . Точка перетину висот поділяє одну з них у відношенні  $2:1$ , рахуючи від вершини трикутника. Доведіть, що, трикутник  $ABC$  — рівносторонній.
26. Висота прямокутного трикутника, проведена до гіпотенузи, у 4 рази менша від гіпотенузи. Знайдіть кути трикутника.

### *Коло і круг*

1. Доведіть, що коли через дану точку до кола проведено дві дотичні, то відрізки дотичних, які сполучають дану точку з точками дотику, рівні.
2. У колі проведено хорди  $AB$  і  $BC$ , кожна з яких дорівнює радіусу кола. Знайдіть кут  $ABC$ .
3. Два кола дотикаються внутрішнім чином. Радіус одного з них в 5 разів більший від радіуса іншого, а відстань між їх центрами дорівнює 20 см. Знайти радіуси кіл.
4. В колі провели діаметр  $AB$  і паралельну йому хорду  $CD$ , так, що відстань між ними дорівнює половині радіуса цього кола (див. рис.). Знайдіть кут  $CAB$ .



5. Через точку  $M$  проведено дотичні  $MK$  і  $ME$  до кола із центром в точці  $O$ , де  $K$  і  $E$  — точки дотику,  $\angle OMK = 30^\circ$ ,  $MK = 6$  см. Знайдіть довжину хорди  $KE$  і довжину відрізка  $OM$ .

6. Доведіть, що радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник, визначають за формулою:

$$r = \frac{a+b-c}{2}$$
, де  $r$  — радіус вписаного кола,  $a$  і  $b$  — катети,  $c$  — гіпотенуза.

7. У рівнобедреному трикутнику  $ABC$  відомо, що  $AB = BC$ , точка  $O$  — центр вписаного кола, точки  $D$  і  $E$  — точки дотику вписаного кола до сторін  $AC$  і  $AB$  відповідно,  $\angle ABC = 48^\circ$ . Знайдіть кут  $DOE$ .

8. Сума радіусів вписаного і описаного кіл прямокутного трикутника дорівнює одному з катетів. Знайдіть гострі кути трикутника.

9. Хорда перетинає діаметр кола під кутом  $30^\circ$  і ділить його на відрізки завдовжки 4 см і 10 см. Знайдіть відстань від центра кола до цієї хорди.

10. Доведіть, що коли центр кола, описаного навколо трикутника, належить його стороні, то цей трикутник — прямокутний.

11. Коло дотикається до сторони  $AB$  трикутника  $ABC$  у точці  $M$  і дотикається до продовження двох інших сторін. Доведіть, що сума довжин відрізків  $BC$  і  $BM$  дорівнює половині периметра трикутника  $ABC$ .

12. У трикутник  $ABC$  вписано коло, яке дотикається до сторони  $AB$  у точці  $M$ ,  $BC = a$ . Доведіть, що  $AM = p - a$ , де  $p$  — півпериметр трикутника  $ABC$ .