

Алгебра 9

Блок 1

1. Прямі $y = x + 4$ і $y = -2x - 5$ перетинаються в точці O . Знайти:
а) Координати точки O ; б) Записати рівняння кола з центром в точці O , яке проходить через точку $A(1; -2)$; в) Знайти точки перетину кола з віссю ординат.
2. Задано коло $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ та пряму $y = -3x + 10$.
а) Скласти рівняння прямої, яка паралельна заданій прямій і проходить через центр кола.
б) Встановити взаємне розташування заданого кола і заданої прямої.
3. Дано вершини трикутника ABC . Скласти рівняння висоти трикутника проведеної з вершини A , якщо $A(-1; 5)$, $B(-2; 2)$, $C(2; 1)$.
4. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(0; -2)$ та $B(2; 0)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $y = -x$. Площа трикутника дорівнює 8. Визначити $y - x$, якщо пара $(x; y)$, де $x < 0$ – координати точки C .

Блок 2

1. Знайти найбільший цілий розв'язок нерівності $\frac{(x^2 - 6x + 9)(2 - x)}{(x + 1)^3(x + 2)} \geq 0$.
2. При яких b і c вершина параболи $y = 5x^2 + bx + c$ знаходиться в точці $B(2; 7)$.
3. Знайти область визначення функції: $y = \sqrt{12 + 4x - x^2} - \frac{x - 5}{x^2 + 3x}$.
4. Побудувати графік функції $y = x^2 - 4|x| + 3$. За графіком знайти:
а) проміжки зростання функції;
б) множину значень функції.
5. Довести нерівність: а) $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 2x + 2 > 0$, $x, y \in \mathbb{R}$;
б) $\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} \geq 2$.
6. Знайти усі значення параметра m , при яких нерівність $(m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + 3m - 3 \leq 0$ виконується при всіх дійсних значеннях x .

Блок 3

1. Знайти перший член і різницю арифметичної прогресії, якщо сума третього і п'ятого членів дорівнює -2 , а сума сьомого і десятого членів -4 .
1. Дана геометрична прогресія (c_n) з додатними членами $c_4 = 24$; $c_6 = 96$.
1) Знайдіть c_1
2) Скільки членів прогресії потрібно взяти, щоб їхня сума дорівнювала 45?
2. Сума n перших членів геометричної прогресії виражається формулою $S_n = 4(3^n - 1)$. Знайти її знаменник і третій член.
3. Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 162, а сума чотирьох її перших членів дорівнює 160. Знайти перший член і знаменник прогресії.
4. Знайдіть суму всіх від'ємних членів арифметичної прогресії $-5, 2; -4, 8; -4, 4; \dots$
5. Три числа складають арифметичну прогресію. Знайдіть ці числа, якщо відомо, що їхня сума дорівнює 27, і при зменшенні на 1, 3 і 2 відповідно вони складають геометричну прогресію.

Блок 4

1. Розв'язати нерівність: $(2x+1)(x-7) > (3x-1)^2 - 50$
2. Знайти кількість цілих розв'язків нерівності $(2-x)(x+3)^3(x+1)^2 \geq 0$ на проміжку $[-10;10]$
3. Знайти область визначення функції: $y = \sqrt{\frac{6+x-x^2}{x-2}}$
4. Розв'язати нерівності:

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{1-x} < 2$$

$$1) \left| \frac{x+3}{2x-3} \right| \geq 1$$

$$(x^2 - x - 1)(x^2 - x - 7) < -5$$

Блок 5

1. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15}, \\ x^2 + y^2 = 34. \end{cases}$$
2. Два робітники, працюючи разом, можуть виконати замовлення за 12 днів. Вони пропрацювали разом 10 днів, і один з них захворів. Тоді другий робітник закінчив виконувати замовлення через 5 днів, працюючи один. За скільки днів кожен робітник може виконати дане замовлення, працюючи самостійно?
3. Із села A в село B , відстань між якими дорівнює 20 км, вирушив пішохід. Через 2 год із села A в тому самому напрямі вирушив велосипедист зі швидкістю 15 км/год, який наздогнав пішохода, передав йому пакет і поїхав у село A з тією самою швидкістю. Пішохід прийшов у B , а велосипедист повернувся в A одночасно. Знайдіть швидкість руху пішохода.
4. Побудуйте на координатній площині множину точок $(x;y)$, координати яких задовольняють нерівність $||x| - y| \geq 1$.

Блок 6

1. Розв'язати графічно систему рівнянь:
$$\begin{cases} (x-2)^2 + y^2 = 4; \\ y = -x. \end{cases}$$
2. Установіть графічно кількість розв'язків системи рівнянь:
$$\begin{cases} |x| + |y| = 1; \\ x = y^2 - 1. \end{cases}$$
3. Побудувати графік рівняння $|y - 1| = x - 2$.
4. При яких значеннях параметра a система має два розв'язки
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25; \\ (x-a)^2 + y^2 = 9. \end{cases}$$

Блок 7

1. Побудуйте на координатній площині множину точок $(x;y)$, координати яких задовольняють умов:

$$a) \begin{cases} y \leq x^2 - 4x + 4, \\ (x-2)^2 + y^2 \leq 1; \end{cases}$$

$$б) \begin{cases} y - |x| + 3 \geq 0, \\ |x| \leq 1; \end{cases}$$

в) $|2x + y| > x - y$.

2. Зобразити множину точок, що задовольняють систему нерівностей і обчислити площу отриманої фігури $\begin{cases} |x| + |y| \leq 1, \\ x^2 + (y - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$

3. З двох міст, відстань між якими дорівнює 300 км, виїхали одночасно назустріч один одному легковий і вантажний автомобілі, які зустрілися через 2,5 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля, якщо вантажівка витратила на весь шлях на 3 год 45 хв більше, ніж легковий автомобіль.

Блок 8

1. Обчислити: а) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$;

б) $\frac{P_5 + P_4}{P_3}$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $\frac{(x+2)!}{x!} = 72$;

б) $A_{x-4}^{x-6} = \frac{1}{60} P_{x-2}$.

3. На автостоянці залишилось 8 вільних місць. Скількома способами на ній можна розмістити 8 автомобілів?

4. Скільки п'ятицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, щоб в числі цифри не повторювалися?

5. Скільки існує семицифрових чисел?

6. Скількома способами можна розставити 4 книжки з алгебри і 3 книжки з геометрії, щоб усі книжки з геометрії стояли поруч?

Блок 9

Тест «Задачі на відсотки»

1. Знайти, скільки відсотків числа 12 складає число 9?

а) 7,5%; б) 75%; в) $33\frac{1}{3}\%$; г) 0,75%; д) 0,075%.

2. З молока одержали 10% сиру. Скільки сиру одержать із 40 кг молока?

а) 20кг; б) 400кг; в) 4кг; г) 5кг; д) 8 кг.

3. Молочний кіоск за першу половину дня продав 45% товару на суму 1800 гривень. Яку суму за день виручить кіоск, якщо продасть увесь товар?

а) 3600грн; б) 8100грн; в) 4000грн; г) 81000грн; д) 9000грн.

4. У зв'язку з ремонтними роботами довжина маршруту автобуса змінилася із 20 км до 22,4 км. На скільки відсотків збільшилась довжина маршруту?
- а) 112%; б) 11%; в) 12%; г) 9%; д) 15%.
5. Вкладник вніс до банку 2000грн., а через рік отримав 2160грн. Під який відсоток річних були покладені гроші?
- а) 12%; б) 8%; в) 6%; г) 14%; д) 16%.
6. 10%-й розчин солі містить 180г води. Яка маса цього розчину?
- а) 198г; б) 190г; в) 1800г; г) 200г; д) 400г.
7. Сплав, маса якого дорівнює 320кг, містить 20% олова, 144 кг свинцю і решту – домішки. Визначити відсотковий уміст домішок.
- а) 80%; б) 25%; в) 35%; г) 55%; д) 48,75%.
8. Деяке додатне число спочатку збільшили на 50%, а потім одержане число зменшили на 50%. Як змінилося початкове число?
- а) не змінилося; б) зменшилося на 25%; в) зменшилося на 20%;
г) зменшилося на 5%; д) збільшилось на 5%.
9. Вкладник вніс до банку 1000грн. під 8% річних. Яку суму він матиме на рахунку через 3 роки?
- а) $3 \cdot 1000 \cdot 1,08$; б) $3 \cdot 1000 \cdot 0,08$; в) $1000 \cdot 0,08^2$; г) $1000 \cdot 0,08^3$; д) $1000 \cdot 1,08^3$.
10. Товар подешевшав на 20%. На скільки відсотків більше можна купити товару за ту ж кількість грошей?
- а) 25%; б) 20%; в) 10%; г) 40%; д) 5%.
11. У сплаві міді та цинку мідь становить $\frac{1}{7}$ частину маси цинку. Який відсотковий уміст міді у сплаві?
- а) $14\frac{2}{7}\%$; б) 12,5%; в) 25%; г) 45%; д) 6,2%.
12. 2 кг сплаву міді з оловом містить 40% міді. Скільки потрібно додати до цього сплаву олова, щоб отриманий сплав містив 16% міді?
- а) 3кг; б) 2,5кг; в) 2кг; г) 4кг; д) 3,5кг.

13^{**}. Вкладник вніс до банку 1600 грн. під 10% річних. Через два роки він забрав з банку половину суми, яка була на рахунку, а залишену суму розмістив під 12% річних. Скільки грошей на рахунку вкладника буде через три роки після зняття половини суми?

Геометрія

Блок 1

1. Сторони паралелограма $7\sqrt{3}$ см і 14 см, а тупий кут - 150° . Знайти меншу діагональ і площу паралелограма.
2. У трикутнику $ABCA(3;-1)$, $B(-5;7)$, $C(1;5)$. Знайдіть довжину середньої лінії KP трикутника ABC , де точки K і P – середини сторін AB і BC відповідно.
3. У коло радіуса $\sqrt{3}$ см вписано правильний трикутник. На його висоті як на стороні побудовано другий правильний трикутник і в нього вписано коло. Знайдіть радіус цього кола.
4. З однієї точки кола проведено дві хорди завдовжки 18 см і 34 см. Знайти діаметр кола, якщо відстань між серединами заданих хорд дорівнює 10 см.
5. Довжина дуги, градусна міра якої 120° , що обмежує сектор і сегмент даного круга, дорівнює 8. Знайти довжину кола, вписаного в даний сегмент.
6. Довести, що відношення периметра трикутника до однієї із його сторін дорівнює відношенню висоти, яка проведена до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.

Блок 2

1. Дві сторони трикутника, кут між якими дорівнює 60° , відносяться як 5:8, а третя сторона дорівнює 21 см. Знайдіть периметр трикутника.
2. Дано три вершини паралелограма $ABCD:A(-3;-2)$, $B(5;3)$, $C(3;-5)$. Знайдіть координати четвертої вершини D .
3. Навколо правильного трикутника зі стороною $2\sqrt{3}$ см описано коло, а навколо кола описано правильний шестикутник, навколо якого описано коло. Знайдіть радіус цього кола.
4. У трикутнику $ABCAB=14$ см, сторона BC ділиться точкою дотику вписаного кола на відрізки $BK=8$ см, $KC=7$ см. Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника.
5. У коло радіуса 8 см вписано чотири рівні між собою кола, кожне з яких дотикається до даного кола і до двох суміжних з ним. Обчислити площу фігури, обмеженої цими чотирма колами.
6. Довести, що площа трикутника обчислюється за формулою $S = pr$, де p – півпериметр трикутника, а r – радіус вписаного кола.

Блок 3

1. Сторони паралелограма $8\sqrt{2}$ см і 7 см, а гострий кут - 45° . Знайти більшу діагональ і площу паралелограма.
2. У трикутнику $ABCA(3;-5)$, $B(7;1)$, $C(-3;9)$. Знайдіть довжину середньої лінії MN трикутника ABC , де точки M і N – середини сторін AC і BC відповідно.

3. Радіус кола дорівнює 8 см. У коло вписано правильний трикутник і на його стороні побудовано квадрат. Знайдіть радіус кола, описаного навколо цього квадрата.
4. З однієї точки кола проведено дві хорди завдовжки 60 см і 52 см. Знайти радіус кола, якщо відстань між серединами заданих хорд дорівнює 8 см.
5. Периметр сектора дорівнює 28 см, а його площа дорівнює 49см^2 . Визначити довжину дуги сектора.
6. Довести, що площа трикутника обчислюється за формулою $S = \frac{abc}{4R}$, де R - радіус описаного кола.

Блок 4

1. Знайти абсолютну величину вектора $\vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 8$, а кут між ними 120° .
2. Знайти кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}|$, а вектори $2\vec{a} - 3\vec{b}$ і $3\vec{a} + 2\vec{b}$ перпендикулярні.
3. Дано точки $A(1;2)$, $B(3;3)$, $C(4;-3)$, $D(-1;0)$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{BC}$ і $\vec{AD}$. Порівняйте цей кут з прямим кутом.
4. На сторонах AB і BC трикутника ABC вибрано точки M і N так, що $AB = 3BM$ і $BC = 3BN$. За допомогою векторів доведіть, що прямі MN і AC паралельні.
5. Доведіть за допомогою векторів, що в рівнобедреному трикутнику медіана, проведена до основи, перпендикулярна до неї.
6. Знайти кут між медіанами катетів рівнобедреного прямокутного трикутника, навпроти гіпотенузи гіпотенузи.

Блок 5

1. Прямі $y = x + 4$ і $y = -2x - 5$ перетинаються в точці O . Знайти: а) Координати точки O ; б) Записати рівняння кола з центром в точці O , яке проходить через точку $A(1;-2)$; в) Знайти точки перетину кола з віссю ординат.
2. Задано коло $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ та пряму $y = -3x + 10$.
 - а) Скласти рівняння прямої, яка паралельна заданій прямій і проходить через центр кола.
 - б) Встановити взаємне розташування заданого кола і заданої прямої.

3. Дано вершини трикутника ABC . Скласти рівняння висоти трикутника проведеної з вершини A , якщо $A(-1;5)$, $B(-2;2)$, $C(2;1)$.
4. Дві вершини трикутника ABC знаходяться в точках $A(0;-2)$ та $B(2;0)$, а третя точка $C(x; y)$ лежить на прямій $y = -x$. Площа трикутника дорівнює 8. Визначити $y-x$, якщо пара $(x; y)$, де $x < 0$ – координати точки C .

Блок 6

1. Прямокутний трикутник з катетом 12 см і трикутник зі сторонами 5 см, 29 см і 30 см рівновеликі. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника.
2. У трикутнику дві бічні сторони дорівнюють 52 і 60 см, а висота проведена до основи, дорівнює 48 см. Обчислити діаметр вписаного кола.
3. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 128 см, а бісектриса, проведена до основи, дорівнює 32 см. Обчислити діаметр описаного кола.
4. Дві сторони трикутника дорівнюють 35 і 14 см, а бісектриса кута між ними дорівнює 12 см. Обчислити площу трикутника.
5. На сторонах OB і OD кута O відкладено відрізки $OA=8$ см, $AB=3$ см, $OC=5$ см, $CD=7$ см. Знайти відношення площ трикутника OBD і чотирикутника $ABCD$.
6. Більша діагональ ромба ділить його висоту, проведenu з вершини тупого кута, на відрізки 75 і 21 см. Обчисліть площу ромба.
7. Діагоналі ромба відносяться, як 3:4, а їх різниця дорівнює 20 см. Обчисліть площі частин, на які ділить ромб пряма, що проходить через вершину тупого кута і середину протилежної сторони.
8. Бісектриса кута паралелограма, який дорівнює 150° , ділить його сторону на відрізки 24 і 16 см, починаючи від вершини протилежного кута. Обчисліть площу паралелограма.
9. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 75 і 100 см. Обчислити площу трапеції.
10. У коло вписано чотирикутник, сторони якого послідовно дорівнюють 4 см, 6 см, 8 см і 12 см. Знайдіть площу чотирикутника.
11. Довести, що вписане в прямокутний трикутник коло ділить гіпотенузу на відрізки, добуток довжин яких дорівнює площі цього трикутника.
12. Довести, що відношення периметра трикутника до однієї із його сторін дорівнює відношенню висоти, яка проведена до цієї сторони, до радіуса вписаного кола.
13. Довести, що $3S = 4S_m$, де S – площа трикутника ABC , S_m – площа трикутника, сторонами якого є медіани трикутника ABC .

Блок 7

Практикум по темі «Правильні многокутники. Коло, дуга, круг, сектор, сегмент»

1. Довжина дуги, що обмежує сектор і сегмент даного круга дорівнює π . Знайти площу сегмента, якщо радіус круга 6 см.
2. Довжина дуги, градусна міра якої 120° , що обмежує сектор і сегмент даного круга, дорівнює l . Знайти довжину кола, вписаного в даний сегмент.
3. Знайти площу кругового сегмента з основою $a\sqrt{3}$ і висотою $\frac{a}{2}$.
4. **Сканаві 10.035.** Периметр сектора дорівнює 28 см, а його площа дорівнює 49см^2 . Визначити довжину дуги сектора.
5. Площа кругового кільця дорівнює S . Радіус більшого кола дорівнює довжині меншого кола. Визначити радіус останнього.
6. Радіус круга дорівнює 2 см. По різні боки від центра круга проведено паралельні хорди, одна з яких дорівнює стороні правильного вписаного чотирикутника, а друга – стороні правильного вписаного шестикутника. Знайдіть площу частини круга, яка міститься між хордами.
7. **Сканаві 10.010.** Кожна сторона правильного трикутника поділена на три рівні частини, і відповідно точки поділу, рахуючи в одному напрямку, з'єднані між собою. В отриманий правильний трикутник вписано коло радіуса $r=6$ см. Визначити сторони трикутників.
8. Сторона рівностороннього трикутника дорівнює a . На одній із його сторін дано точку, відстань від якої до дрігої сторони дорівнює b . Знайти відстань від цієї точки до третьої сторони.
9. У коло радіуса R вписано чотири рівні між собою кола, кожне з яких дотикається до даного кола і до двох суміжних з ним. Обчислити площу фігури, обмеженої цими чотирма колами.
10. Довжина кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника, дорівнює 20π см. Знайдіть площу цього трикутника. Якщо його основа 12 см.
11. **Сканаві 10.142.** В правильний трикутник вписано коло, а в нього – правильний шестикутник. Знайти відношення площ трикутника і шестикутника.
12. **Сканаві 10.128.** Навколо квадрата, сторона якого дорівнює a , описано коло, а навколо кола – правильний шестикутник. Визначити площу шестикутника.
13. На стороні правильного трикутника, яка дорівнює 6 см, побудовано півкруг, який лежить у тій же півплощині, що й трикутник. Визначте площу тієї частини трикутника, яка лежить поза півкругом.

