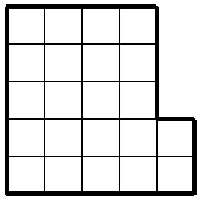
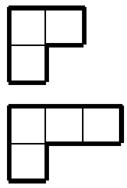
Завдання для олімпіадників (з 8 до 9 класу)

1. У бабусі Софії 20 онуків. Семеро з них ходять до неї в гості кожний день, а ті що залишились — через день. Сьогодні до бабусі Софії прийшли 13 онуків. Скільки онуків їй чекати завтра?

2. Чи можна розрізати квадрат на 2016 менших квадратиків (не обов’язково однакових)?

3. Софійка розрізала фігуру на куточки та L-тетраміно, намальовані справа від неї. Скільки куточків могло вийти? *Нагадаємо, що в таких задачах треба знайти усі можливі відповіді і показати, що інших нема!*

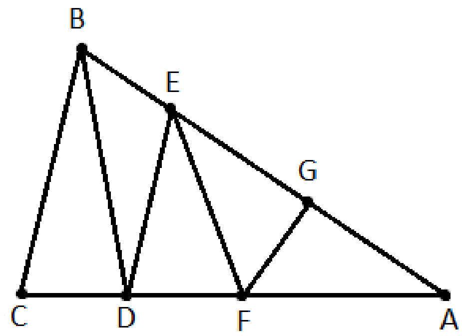




4. На вечірку зібрались сім чоловік, серед яких є брехуни, які завжди брешуть, і лицарі, які завжди кажуть правду. Після того, як усі сіли за круглий стіл, перший сказав другому: «Ти – брехун». Почувши це, другий назвав брехуном третього, третій — четвертого, четвертий — п’ятого, п’яти — шостого, шостий — сьомого. А ким назвав сьомого перший?

5. Серед 10 чоловік, підозрюваних в злочині, двоє винні і вісім невинних. Екстрасенсу пред’являють підозрюваних по троє. Якщо серед трьох є злочинець, екстрасенс показує на нього, якщо два злочинця — на одного з них, а якщо злочинців нема — на будь-якого з трьох. а) Як за 4 сеанси знайти хоча б одного злочинця. б) Як за 6 таких сеансів напевно виявити обох злочинців?

6. Чи можна розрізати без остачі прямокутник зі сторонами 2002 і 2017 на рівні прямокутники зі сторонами 13 і 77?
7. В бригаді молодих мудреців 8 чоловік і їх сумарний вік - 200 років. Доведіть, що з них можна вибрати трьох чоловік, сумарний вік яких не менше 75 років.
8. Як в трикутнику ABC провести ламану $BDEFG$ (дивись малюнок), щоб усі п’ять отриманих трикутників мали однакові площі?



9. Відстанню між двома вершинами зв’язного графа будемо називати довжину найкоротшого шляху між ними. Для вершини g графа позначимо $d(g)$ найбільшу відстань від g до інших вершин графу. Центрами графу назвемо ті вершини g в яких $d(g)$ приймає найменше значення в графі. Яка кількість центрів може бути у а) зв’язному графі б) у дереві?
10. Для десяти натуральних чисел порахували всі їх попарні найбільші спільні дільники. Чи можуть 45 отриманих чисел дорівнювати 1, 2, ..., 45?
11. В трикутнику ABC AB < AC. Пряма, яка проходить через вершину B паралельно AC, перетинає бісектрису зовнішнього кута A в точці D. Пряма, яка проходить через вершину C паралельно AB, перетинає цю бісектрису в точці E. На стороні AC вибрана точка F так, що FC = AB. Доведіть, що DF = FE.
12. Чи може добуток 2017 натуральних чисел (не обов’язково різних) бути рівно на 2017 більше їх суми?
13. Розв’яжіть рівняння $[x^3] = \{x^2\} + 11$ ($[x]$ – найбільше ціле число, яке не перевищує x, $\{x\} = x - [x]$).
14. Для розфарбування поверхні куба знадобилося 36 г фарби. Коли фарба висохла, куб розпиляли на 27 однакових кубиків. Скільки знадобиться фарби, щоб пофарбувати не зафарбовану частину їх поверхні?
15. В кімнаті знаходиться 17 чоловік з острова лицарів та брехунів, кожний житель котрого або завжди говорить правду, або завжди бреше. Кожний з них сказав: «Серед інших 16

чоловік (всіх, крім мене) рівно в п’ятьох — замість капелюха макітра». Скільки брехунів може бути в кімнаті? Перерахуйте усі варіанти і поясніть, чому інших варіантів нема.

16. Чи існують чотири числа, попарні різниці між котрими рівні: 2, 2, 3, 4, 5, 6?
17. Три квадратних плитки шоколаду розмірами 3×3, 4×4 і 5×5 треба розділити порівну на п’ятьох. Яку найменшу кількість розломів для цього треба зробити. (За один раз дозволяється розділити один з шматків по наявному прямолінійному заглибленню).
18. Необхідно розбити ігрове поле на блоки; блок повинен містити стількі клітинок, скільки позначено числом в клітинках блоку. Блоки, які мають однаковый розмір, не повинні дотикатися по горизонталі або вертикалі. Клітинки, які з початку не містили чисел, також можуть бути поєднані в блоки, необхідні для розвязку головоломки. Приклад:

	2		8				8		5
			4	3		7		8	5
3						7			
3			5	4				4	
	4	3			5	5			
			6	5			6	7	
	6				5	4			3
			2						5
2	4		4		3	6			
4		5				3		1	

2	2	8	8	8	8	8	8	8	5
3	5	5	4	3	3	7	4	8	5
3	4	5	4	4	3	7	4	4	5
3	4	5	5	4	1	7	7	4	5
4	4	3	3	3	5	5	7	7	5
6	6	6	6	5	5	4	6	7	3
6	6	5	5	1	5	4	6	3	3
2	4	5	2	2	4	4	6	5	5
2	4	5	4	4	3	6	6	5	5
4	4	5	4	4	3	3	6	1	5

Чи можна розрізати на такі блоки наступні таблиці:

А)

6			8		
	6		8	2	
	7			3	3
		8	8		2
7	7		5		5
		3			

Б)

5		6			6	8				
				4		8			10	
							8			10
5				11	11				10	
		11			9					
				9					7	
13					6	6		7		4
							7			
	13					12				3
				12			12		3	

19. Відомо, що числа a, b, c задовольняють умови:

$a^2+2=b^4$, $b^2+2=c^4$, $c^2+2=a^4$. Які значення може приймати вираз $(a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)$? (***<u>Відповідь:</u>*** 1.)

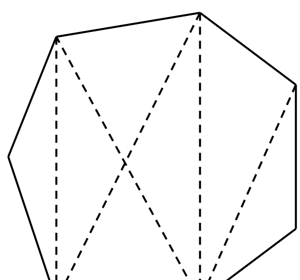


Рис. 2

20. *а)* Опуклий семикутник хочуть розбити на трикутники, проводячи його діагоналі. Доведіть, що при

цьому можна отримати 5 або 7 трикутників, але не можна дістати 6 трикутників.

б) Доведіть, що існує неопуклий семикутник, який можна розбити внутрішніми діагоналями на 6 трикутників. Внутрішньою діагоналлю многокутника M називається відрізок, що сполучає дві несусідні вершини M і не виходить за межі фігури M .

21. Для кожної пари натуральних чисел a, b визначене ціле невід'ємне число $a*b$, яке задовольняє такі дві умови:

1) $(a+b)*b = a*b+1$;

2) $(a*b)\cdot(b*a) = 0$.

Знайдіть значення виразів $2016*121$ та $2016*144$.

22. Відомо, що числа a, b, c задовольняють умови:

$$\frac{a+c}{a+1} = b,\ \frac{c+b}{c+1} = a,\ \frac{b+a}{b+1} = c.$$

Які значення може приймати вираз $(a+1)(b+1)(c+1)$?

23. В рядок виписані числа 1, 2, …, n. При цьому числа 1 та n пофарбовані у синій колір, а всі інші – у жовтий. Двоє гравців – Олеся та Андрій – по черзі фарбують одне з жовтих чисел у синій колір за такими правилами: першим ходом Олеся (вона розпочинає) фарбує у синій колір будь-яке з жовтих чисел (позначимо його через k). Тоді Андрій обирає той з проміжків чисел (1, 2, …, k) чи (k, $k+1$, …, n), який містить більше жовтих чисел. Якщо ці проміжки за кількістю жовтих чисел однакові, то вибирається будь-який з двох проміжків. Якщо, наприклад, більшим є проміжок (1, 2, …, k), то інший проміжок у подальшій грі участі не бере. Після цього Андрій фарбує у синій колір будь-яке з жовтих чисел нового проміжку. Тепер новий проміжок також розділився на два менших. Далі Олеся для свого ходу вибирає той з двох нових проміжків, що містить більше жовтих чисел, а інший проміжок уже поза грою. І так далі. Перемагає у грі той з гравців, кому вдасться пофарбувати у синій колір таке число, у якого сусідні ліворуч та праворуч вже сині. Хто перемагає в цій грі при правильній грі обох гравців?

24. Для яких натуральних n існують $2n$ попарно різних натуральних чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_n$, що задовольняють рівності:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n \text{ та } a_1 a_2 \ldots a_n = b_1 b_2 \ldots b_n\,?$$