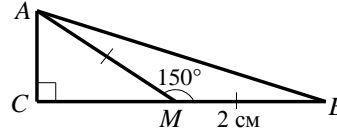


Тренувальні вправи на канікули з геометрії для майбутніх дев'ятикласників

Задачі на обчислення

1. Продовження бічних сторін AB і CD трапеції $ABCD$ перетинаються в точці M , $DC : CM = 3 : 5$, BC — менша основа трапеції. Сума основ трапеції дорівнює 26 см. Знайдіть основу BC .
2. Через середину діагоналі BD прямокутника $ABCD$ проведено пряму, яка перетинає сторони BC і AD прямокутника в точках M і K відповідно, $BD = 10$ см, $BM = 6$ см, $MC = 2$ см. Обчисліть площу чотирикутника $AMCK$.
3. Радіус кола, вписаного в рівнобічну трапецію, дорівнює R , а один із кутів трапеції — 45° . Знайдіть площу трапеції.
4. Знайдіть площу трикутника ABC , зображеного на рисунку.
5. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC точка перетину медіан віддалена від вершини B на 6 см. Знайдіть відстань від середини бічної сторони трикутника до його основи.
6. У кут, величина якого становить 60° , вписано два кола, які зовнішньо дотикаються одне до одного. Знайдіть радіус меншого з них, якщо радіус більшого дорівнює 12 см.
7. Пряма, паралельна стороні BC трикутника ABC , перетинає його сторону AB у точці D , а сторону AC — у точці E . Знайдіть площу трикутника ADE , якщо $AE = 2$ см, $EC = 3$ см, а площа чотирикутника $BDEC$ дорівнює 42 см^2 .
8. Більша діагональ ромба дорівнює d , а гострий кут — α . Знайдіть площу ромба.
9. Точка дотику кола, вписаного в прямокутний трикутник, ділить його гіпотенузу на відрізки 8 см і 12 см. Знайдіть периметр трикутника і його площу.
10. Сторони трикутника дорівнюють 12 см, 15 см і 18 см. Знайдіть бісектрису трикутника, проведену з вершини його найбільшого кута.
11. Коло дотикається до одного з катетів рівнобедреного прямокутного трикутника і проходить через вершину протилежного гострого кута. Знайдіть радіус кола, якщо його центр належить гіпотенузі трикутника, а катет трикутника дорівнює 10 см.
12. У трикутнику ABC відрізок BK — висота, відрізок AM — бісектриса, $BK = 26$ см, $AB : AC = 6 : 7$. З точки M опущено перпендикуляр MD на сторону AC . Знайдіть відрізок MD .
13. Точка перетину бісектрис гострих кутів при більшій основі трапеції належить її меншій основі. Знайдіть площу трапеції, якщо її бічні сторони дорівнюють 13 см і 20 см, а висота — 12 см.
14. У трикутнику ABC відомо, що $AB = BC = 13$ см, $AC = 10$ см. До кола, вписаного в цей трикутник, проведено дотичну, яка перетинає сторони AB і BC у точках M і K відповідно. Обчисліть периметр трикутника MBK .
15. На стороні BC трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MC = 3 : 10$. У якому відношенні відрізок AM ділить медіану BK трикутника ABC ?
16. Висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, дорівнює 20 см, а висота, проведена до бічної сторони, — 24 см. Знайдіть площу цього трикутника.
17. У прямокутному трикутнику ABC до гіпотенузи AB проведено висоту CM . Площа трикутника ACM дорівнює 6 см^2 , а площа трикутника BCM — 54 см^2 . Знайдіть сторони трикутника ABC .
18. На медіані BD трикутника ABC позначено точку M так, що $BM : MD = 3 : 1$. Знайдіть площу трикутника ABC , якщо площа трикутника AMD дорівнює 3 см^2 .
19. Бісектриса гострого кута A паралелограма $ABCD$ ділить його сторону BC у відношенні $2 : 5$, рахуючи від вершини тупого кута, який дорівнює 120° . Обчисліть площу паралелограма, якщо його периметр дорівнює 54 см.
20. Вершини чотирикутника $ABCD$ лежать на колі, причому AB — діаметр, а сторона CD рівна радіусу. Знайти кут між продовженнями двох інших сторін.
21. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 13 см, а висота, проведена до основи, — 12 см. Знайти:
 - а) довжину середньої лінії, паралельної бічній стороні;
 - б) основу трикутника;
 - в) косинус кута при основі трикутника;
 - г) площу трикутника;



г) радіус вписаного кола.

22. У рівнобічну трапецію, висота якої дорівнює 24 см, вписано коло. Точка дотику ділить бічну сторону у відношенні 9:16. Знайдіть площу трапеції.
 23. Діагональ рівнобічної трапеції є бісектрисою її гострого кута. Знайдіть площу трапеції, якщо її периметр дорівнює 22 см, а діагональ ділить висоту, проведену з вершини тупого кута, у відношенні 4:3.
 24. Висота паралелограма, проведена із вершини тупого кута, дорівнює 2 і ділить сторону паралелограма навпіл. Гострий кут паралелограма дорівнює 30° . Знайдіть діагональ, проведену із вершини тупого кута, і кути, які вона утворює зі сторонами.
 25. На дузі AC кола, описаного навколо рівностороннього трикутника ABC , позначено точку M так, що дуга AM вдвічі більша дуги CM . Знайдіть кути трикутника AMC .
 26. У трикутнику дві бічні сторони дорівнюють 52 і 60 см, а висота, проведена до основи, дорівнює 48 см. Обчислити довжину вписаного кола.
 27. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на 75 і 100 см. Обчислити площу трапеції.
 28. Більша діагональ ромба ділить його висоту, проведену з вершини тупого кута, на відрізки 75 і 21 см. Обчисліть площу ромба.
 29. В рівнобічній трапеції більша основа a , а висота h утворює з бічною стороною кут β . Знайдіть невідомі сторони трапеції.
 30. BD - висота гострокутного трикутника ABC , $AD = a$, $\angle BAC = \alpha$, $\angle DBC = \beta$. Знайти сторони трикутника ABC .
 31. Радіус кола, описаного навколо прямокутного трикутника, дорівнює 15 см, а радіус вписаного в цей трикутник кола дорівнює 6 см. Знайдіть сторони трикутника і його площу.
 32. Знайдіть площу паралелограма, сторони якого дорівнюють 9 см і 15 см, а одна з діагоналей перпендикулярна до сторони.
 33. Периметр ромба 40 см, а одна з його діагоналей 12 см. Знайдіть радіус кола, вписаного в ромб.
 34. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 15 см, а проекція іншого катета на гіпотенузу дорівнює 16 см. Обчисліть радіуси вписаного і описаного кіл трикутника і його площу.
 35. З точки поза колом проведено дотичну, довжина якої дорівнює 20 см. Обчисліть радіус кола, якщо відстань від цієї точки до кола дорівнює 10 см.
 36. Основи рівнобічної трапеції дорівнюють 18 см і 32 см. Обчисліть радіус вписаного в трапецію кола, площу трапеції та площу вписаного круга.
- Задачі на доведення**
37. Доведіть, що в опуклому чотирикутнику сума діагоналей менша від периметра.
 38. У паралелограмі $ABCD$ точка M – середина сторони BC , а N – середина CD . Доведіть, що прямі AM і AN ділять діагональ BD на три рівні частини.
 39. В рівнобічній трапеції з перпендикулярними діагоналями середня лінія дорівнює l . Доведіть, що висота трапеції дорівнює l .
 40. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 15° . Доведіть, що висота трикутника, проведена до його гіпотенузи, у 4 рази менша гіпотенузи.
 41. Доведіть, що площа прямокутної трапеції, в яку можна вписати коло, дорівнює добутку її основ.
 42. У гострокутному трикутнику ABC відрізок AH є висотою. З точки H на сторони AB і AC опущено перпендикуляри HK і HL відповідно. Доведіть, що навколо чотирикутника $BKLC$ можна описати коло.
 43. У рівнобічну трапецію можна вписати коло. Доведіть, що квадрат висоти цієї трапеції дорівнює добутку її основ.
 44. Діагоналі AC і BD трапеції $ABCD$ ($BC \parallel AD$) перетинаються в точці M . Доведіть, що $S_{ABM} = S_{CMD}$ і $S_{ABM} \cdot S_{CMD} = S_{CBM} \cdot S_{AMD}$.

Домашня робота на літні канікули з алгебри

1. Про додатні числа x і y відомо, що $\frac{x^2 - 4y^2}{xy} = -3$. Знайдіть значення виразу $\frac{2x^2 + y^2}{3xy}$.

2. Знайдіть множину розв'язків системи нерівностей:

$$\begin{cases} (x+8)(x-1) - x(x+5) \leq 7, \\ \frac{x+1}{6} - x \leq 6. \end{cases}$$

3. Скільки цілих чисел містить множина розв'язків системи нерівностей

$$\begin{cases} \frac{3x-1}{4} - \frac{x+1}{2} \leq 2x+1, \\ 8x+4 \geq 10x+1? \end{cases}$$

4. Розв'яжіть нерівність: а) $|x+2| < 2x-1$; б) $|3x-2| \geq 2x+1$; в) $|x+3| - |2x-5| > 2-3x$;

г) знайдіть найменший цілий розв'язок нерівності $(3x+2)^2 - (9x-1)(x+1) \geq 17$.

5. Скоротіть дріб: а) $\frac{a^2+5a-14}{a^2+14a+49}$; б) $\frac{9x^3+3x^2+3x+1}{-3x^2+2x+1}$.

6. Знайдіть значення виразу $a^2 - 2\sqrt{5}a + 1$ при $a = \sqrt{5} + 4$.

7. Спростіть вираз а) $\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\right) : \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}-\sqrt{a}}$; б) $\left(\frac{x-2\sqrt{xy}+y}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-\sqrt{xy}+y}\right) : \frac{2\sqrt{xy}}{x-\sqrt{xy}+y}$

в) $\frac{x^2+5x}{(x-5)^2} : \left(\frac{5}{x+5} + \frac{x^2+25}{x^2-25} - \frac{5}{5-x}\right)$ г) $\left(\frac{2x-1}{x^2+2x+4} + \frac{1}{x-2} + \frac{9x+6}{x^3-8}\right) \cdot \frac{x^2-4}{9}$

г) $\left(\frac{1}{t^2+5t+6} + \frac{2t+2}{t^2+6t+8} + \frac{1}{t^2+7t+12}\right)^2 : \frac{2}{(t-4)^2+16t}$

д) $0,28a^{-4}b^3c^{-5} \cdot 1\frac{3}{7}a^7b^{-16}c^7$; е) $3\frac{4}{7}a^{-6}b^2 \cdot \left(1\frac{3}{7}a^2b^{-3}\right)^{-2}$; є) $\left(\frac{25a^{-3}}{4b^{-2}}\right)^{-3} \cdot (25a^{-8}b^5)^2$;

ж) Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{3-a}{a^2-2a+1} - \frac{2}{1-a}\right) \cdot \left(\frac{a^2-3a}{a^3+3a^2+3a+1} + \frac{1}{a^2+2a+1}\right)$$

є додатним при всіх допустимих значеннях змінної.

8. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - 10x + 12 = 0$. Не розв'язуючи цього рівняння, знайдіть

значення виразу: а) $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}$; б) $3x_1 + 3x_2 - 4x_1x_2$; в) $|x_2 - x_1|$.

9. Відомо, що $x^2 + y^2 = 6$, $xy = 2$. Чому дорівнює значення виразу $x^4 + x^2y^2 + y^4$?

10. Числа x_1 і x_2 — корені рівняння $x^2 - (2a-3)x + a^2 - 3 = 0$. Не розв'язуючи цього рівняння, знайдіть значення a , при яких виконується рівність $2x_1 + 2x_2 = x_1x_2$.

11. Відомо, що x_1 і x_2 — корені рівняння $3x^2 - 4x - 2 = 0$. Не розв'язуючи цього рівняння, знайдіть значення виразу $|x_2 - x_1|$.

12. Чому дорівнює значення виразу а) $\frac{15^4 \cdot 5^{-6}}{45^{-3} \cdot 3^9}$; б) $\sqrt{(\sqrt{8}-3)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-3)^2}$; в) $(3-\sqrt{2})(5+\sqrt{2}) - (\sqrt{2}-1)^2$?

13. Обчисліть суму $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{11}} + \frac{1}{\sqrt{11}+\sqrt{15}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{27}+\sqrt{31}}$.

14. Розв'яжіть рівняння: а) $(x-4)(x+5)(x+10)(x-2) = 18x^2$; б) $\frac{4x}{x^2+4x+4} - \frac{x-2}{x^2+2x} = \frac{1}{x}$; в) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 90$;

г) $2(x^2+x+1)^2 - 7(x-1)^2 = 13(x^3-1)$; г) $x^2 + \sqrt{x^2+2x+8} = 12-2x$; д) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$;

е) $x^2 + \frac{1}{x^2} - 4x - \frac{4}{x} + 5 = 0$; є) $\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}\right) \cdot (x^4 - 4x^2 - 5) = 0$;
 ж) $\frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{1}{x-4} + \frac{3}{x-5} = 0$; з) $(x-4)(x-3)(x-2)(x-1) = 24$;
 и) $\frac{3}{x^2 - 4x + 1} - x^2 = 3 - 4x$; і) $\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{3x}{x^2 - 8x + 15}$; і) $x^2 + (\sqrt{x-2})^2 - 5 = 0$;
 й) $x^2 + \sqrt{(x-2)^2} - 5 = 0$; к) $|x^2 + 2x + 3| = 3x + 45$; л) $|3x^2 - 3x + 5| = |2x^2 + 6x - 3|$; м) $|x + 2| - |x - 3| = 5$.
 н) установити відповідність між рівняннями (1-4) та кількістю їх розв'язків (А-Д):

- | | |
|-----------------------------------|-----------|
| 1. $ x = -x$ | А чотири |
| 2. $x^2 + 7 x + 12 = 0$ | Б три |
| 3. $x^3 + 2x^2 - 3x = 0$ | В два |
| 4. $(x+3)^4 - 13(x+3)^2 + 36 = 0$ | Г один |
| | Д жодного |

Задачі

- Після двох послідовних знижень ціни, перше з яких було на 20 %, а друге — на 10 %, стілець став коштувати 108 грн. Якою була початкова ціна стільця?
- До 8 кг 60-відсоткового розчину солі долили 4 кг води. Яким після цього став відсотковий вміст солі в розчині?
- Поїзд мав проїхати 64 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля семафора на 12 хв. Тоді він збільшив швидкість на 10 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість поїзда.
- Для перевезення 60 т вантажу було замовлено певну кількість вантажних автомобілів. Через несправність двох з них на кожний автомобіль довелося навантажити на 1 т більше, ніж планувалося. Скільки автомобілів мало працювати на перевезенні вантажу?
- Скільки грамів 4-відсоткового і скільки грамів 10-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб отримати 180 г 6-відсоткового розчину?
- Перший робітник виготовляє 96 однакових деталей на 2 год швидше, ніж другий 112 таких деталей. Скільки деталей виготовляє щогодини кожний робітник, якщо перший робить за годину на 2 деталі більше, ніж другий?
- Перша бригада працювала на ремонті дороги 9 год, після чого до неї приєдналася друга бригада. Через 6 год спільної роботи виявилось, що відремонтовано половину дороги. За скільки годин може відремонтувати дорогу кожна бригада, працюючи самостійно, якщо першій бригаді на це потрібно на 9 год більше, ніж другій?
- На кінцевій зупинці у трамвай зайшли пасажирів і половина з них зайняли місця для сидіння. Скільки пасажирів зайшли на кінцевій зупинці в трамвай, якщо після першої зупинки кількість пасажирів збільшилась на 8 % і відомо, що трамвай вміщує не більше ніж 70 пасажирів?
- Знайти три послідовних непарних натуральних числа, якщо квадрат першого з них на 33 більший, ніж подвоєна сума другого і третього.
- До задуманого додатного цілого числа дописали справа цифру 7 і від утвореного нового числа відняли квадрат задуманого числа. Різницю зменшили на 75% цієї різниці і ще відняли задумане число. Отримали 0. Знайти задумане число.
- Знайти двозначне число, якщо цифра його десятків на 2 більша за цифру одиниць, а добуток цього числа і суми його цифр дорівнює 900.
- В опуклому многокутнику можна провести 65 діагоналей. Скільки він має сторін?

27. Від вершини прямого кута по його сторонах одночасно починають рухатися дві матеріальні точки, швидкості яких 5 м/с і 12 м/с. Через який час відстань між ними буде 52 м?
28. Катер пройшов 18 км за течією річки і потім 20 км проти течії, затративши на весь шлях 2 год. Знайти швидкість течії, якщо власна швидкість катера 20 км/год.
29. На лузі із постійною швидкістю росте трава. 12 корів повністю випасають луг за 4 дні, а 9 корів за 6 днів. За скільки днів випасуть луг 6 корів?
30. Є 8 пакунків з цукерками вагою 1кг, 2кг, 3кг, ..., 8кг (на кожному пакунку написана його вага). В одну з упаковок поклали шматок сиру вагою 1кг. Як за допомогою двох зважувань на терезах без гир знайти пакунок з сиром?
31. Є дві десятилітрові бочки з розчином солі 10% і 15%. Є також три посудини ємністю 3л, 4л, 5л. Як за допомогою переливань отримати один літр 12%-го розчину солі?

Функція

32. Побудуйте графік функції $y = \sqrt{x^2} - 2x + 1$. Користуючись графіком, укажіть проміжки знакосталості функції і нулі функції..
33. Побудуйте графік функції $y = \frac{5x^2 + 4x - 1}{x + 1} - \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9} - (\sqrt{x + 2})^0$. Знайдіть область визначення функції.

34. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} -\frac{1}{x}, & \text{якщо } x \leq -1, \\ x^2, & \text{якщо } -1 < x < 1, \\ \sqrt{x}, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases}$

Користуючись графіком, знайдіть область значень функції.

35. Побудуйте графік рівняння : а) $|y - x| = |x + 1|$; б) $(xy + 1)(y - 1) = 0$; в) $\frac{xy + 1}{x + y} = 0$;
г) $(y - x)^2 + (y - x^2)^2 = 0$.

36. Знайдіть область визначення функції: а) $y = \frac{4}{\sqrt{3x - 15}} + \frac{8}{|x| - 6}$; б) $y = (x - 2)^{-2} + \frac{\sqrt{x + 8}}{\sqrt{10 - x}}$

Параметри

37. Розв'язати рівняння для кожного значення параметра:

а) $x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 2a = 0$; б) $(a + 4)x^2 + 6x - 1 = 0$.

38. При яких значеннях параметра a рівняння $(\sqrt{x} - a)(9x - 16) = 0$ має єдиний розв'язок?

39. Знайдіть усі значення параметра a , при яких сума коренів рівняння $x^2 - (a^2 - 5a)x + 4a - 1 = 0$ дорівнює -6 .

40. Доведіть, що рівняння $bx^2 - (a - b)x - (a + b) = 0$ має хоча б один корінь при будь-яких дійсних значеннях a і b .

41. При яких значеннях параметра a рівняння $(\sqrt{x} - a)(3x^2 + x - 2) = 0$ має єдиний розв'язок?

42. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{x^2 - 3ax + 2a^2 + a - 1}{x + 1} = 0$ має єдиний розв'язок?

43. При яких значеннях параметра a множиною коренів рівняння $|x + 3| + |x - 1| = a$

є числовий відрізок, довжина якого дорівнює 4 (застосуйте геометричний зміст модуля)?

44. При яких значеннях a рівняння $(2a-3)x^2 + (6-4a)x + a-1 = 0$ має єдиний розв'язок? Вказати ці розв'язки для знайдених a .

45. Відомо, що $a + b + c < 0$ і що рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має дійсних коренів. Визначте знак коефіцієнта c .

Подільність. Рівняння в цілих числах.

46. В магазин привезли 223 л молока в бідонах по 10 л та по 17л. Скільки всього було бідонів?

47. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $2y^2 - xy - x^2 = 2$.

48. Поділивши "куточком" многочлен $A(x)$ на многочлен $B(x)$, знайдіть неповну частку й остачу:

$$A(x) = 2x^4 - 3x^3 - x + 1, B(x) = x^2 - 3x + 2.$$

49. Знайти остачу від ділення многочлена $A(x) = 2x^3 + 7x^2 + 7x + 2$ на двочлен $B(x) = x + 2$ (не виконуючи ділення).

50. Розв'яжіть рівняння: а) $x^3 + x^2 - 4x + 2 = 0$; б) $3x^4 + 5x^3 - x^2 - 5x - 2 = 0$;

в) $x^4 - 2x^3 - 18x^2 - 6x + 9 = 0$; г) $4x^3 + 8x^2 + 5x + 3 = 0$.

51. Складіть кросворд, обов'язково використовуючи терміни:

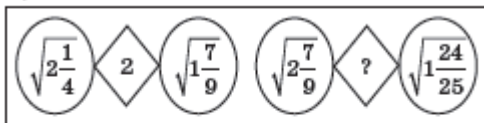
раціональне, ірраціональне, дискримінант, чотирикутник, паралелограм, прямокутник, ромб, квадрат, трапеція, подібність, синус, косинус, площа, описаний, вписаний.

Крім цих слів, можна взяти будь-які математичні поняття, про які дізнався у 8 класі.

52.

4. Виконай логічні вправи:

1)



2)

